

Giochi matematici

Francesco Cavalli, Quaderni SE Bellinzona, dicembre 1997

Gioco o problema? La distinzione è sovente sottile e anche fine a sé stessa. Il gioco matematico, è un problema di matematica che presenta caratteristiche un po' speciali nella sua formulazione o nei trabocchetti che vi sono disseminati.

Nella storia della matematica, una storia ricca e affascinante anche per i non addetti ai lavori, si possono incontrare giochi che hanno prodotto sviluppi importanti nella teoria, come pure problemi veri e propri che, una volta completamente risolti, sono diventati giochi che possono contribuire alla formazione del pensiero matematico.

Nel presentare questo interessante lavoro sul gioco matematico nell'ambito del sostegno pedagogico nella scuola elementare, non mi addentro, non essendone specialista, nella componente didattica, per presentare alcuni momenti significativi della storia della matematica in cui gioco e problema coesistono pienamente.

Fibonacci

Leonardo da Pisa, detto Fibonacci (1170-1250) è certamente uno dei più grandi matematici europei del medioevo. Dopo aver viaggiato e studiato in Africa e in Oriente, diventò un convinto sostenitore dell'enorme superiorità del sistema decimale indo-arabico rispetto a quello romano allora in uso in Europa.

La sua opera principale è il *Liber Abaci*, ultimato nel 1202, un manuale di aritmetica e algebra che ebbe un'influenza decisiva nella diffusione del nuovo sistema in occidente.



Passeggiando tra monumenti delle nostre terre e di gran parte dell'Europa capita spesso di imbattersi in scritte del tipo MDCCLXXIII. Le iscrizioni in cifre romane non sono sempre di facile o immediata lettura; ancora più difficile è l'operazione contraria, cioè convertire i nostri numeri nella forma romana, per non parlare poi del problema di eseguire operazioni aritmetiche in quel sistema.

Durante il medioevo, fin oltre l'anno 1000, mentre in Europa si continuava a faticare con questo scomodo sistema, in oriente (India dapprima e paesi arabi in seguito) si sviluppava il sistema di numerazione posizionale, quello che oggi noi usiamo con tanta naturalezza. Alla numerazione romana (come a quella greca) mancava un elemento fondamentale che caratterizza il nostro sistema posizionale: lo zero, il posto vuoto.

Il ruolo dello zero, nella scrittura dei numeri è una creazione indiana; il *sunya* (vuoto) è usato in documenti a partire dal sesto secolo della nostra era. Dal *sunya* si passa

all'arabo *as-sifr* e da questo ai termini latini *cifra* e *zefirum* da cui discende infine il nostro zero.

Infatti lo sviluppo della matematica non è certamente eurocentrico: i contributi indiani, cinesi e arabi nello sviluppo dell'aritmetica sono di importanza fondamentale. Essenziale è comunque la costruzione del nostro sistema numerico basato su quelle che ancora oggi si chiamano le cifre arabe. Gli Arabi inoltre hanno dato un notevole impulso alla nascita dell'algebra (altra parola di etimologia araba) e hanno avuto un ruolo decisivo nella conservazione delle opere dei grandi matematici greci che l'Europa medievale aveva praticamente dimenticato. Consiglio a tutti la lettura del libro "L'uomo che sapeva contare" che descrive, sotto forma di piacevoli racconti, come si faceva matematica nei sultanati arabi durante il periodo di massimo splendore della loro civiltà.

Nei secoli successivi il sistema decimale ha consentito un decisivo sviluppo del calcolo e di conseguenza di tutte le scienze collegate. Certo che oggi il calcolo è principalmente eseguito con l'elettronica (ancora basato su un sistema posizionale, binario invece che decimale). Ciò non significa che il calcolo tradizionale, mentale o scritto possa essere abbandonato, ma rimane essenziale per la comprensione delle strutture numeriche.

Nei giochi proposti in questo quaderno da Dalila Pellandini le proprietà del sistema decimale hanno un ruolo centrale in diverse sezioni. Le operazioni misteriose come altri giochi possono essere un valido strumento per acquisire i segreti della nostra numerazione e quindi degli algoritmi delle operazioni aritmetiche.

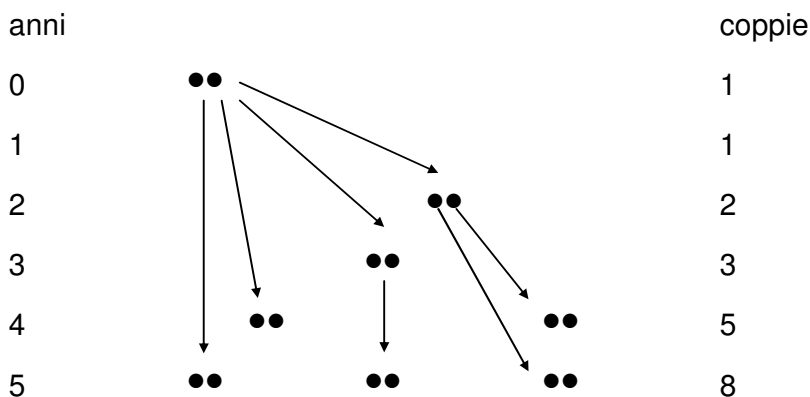
Per ironia della sorte, Fibonacci è ricordato oggi soprattutto perché, nel diciannovesimo secolo, Eduard Lucas (uno studioso francese di teoria dei numeri) chiamò con il nome di successione di Fibonacci la soluzione di un problema contenuto nel Liber Abaci.

È un problema che potrebbe apparire in una qualsiasi raccolta di giochi matematici. Supponiamo, che una coppia di conigli adulti sia allevata in una conigliera e che i conigli comincino a proliferare all'età di due mesi, generando una coppia maschio-femmina alla fine di ogni mese. Se nessuno dei conigli muore, quante coppie di conigli si troveranno nella conigliera in capo a un anno?

La soluzione che si può costruire, mese dopo mese, mostra che il numero di coppie è dato dalla successione:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89

Come osservò lo stesso Fibonacci ogni numero della successione, a partire dal terzo, è la somma dei due che lo precedono.



Molti matematici si sono occupati in seguito della successione di Fibonacci trovando nuove proprietà. Ma il campo di applicazione non si limita alla matematica: si è anche osservato che questi numeri appaiono anche nella natura. Ad esempio si è osservato che

i semi di girasole sono disposti in spirali orarie e antiorarie; di solito 34 di un tipo e 55 dell'altro, ma anche 89 e 144. Sempre numeri di Fibonacci!

Socrate

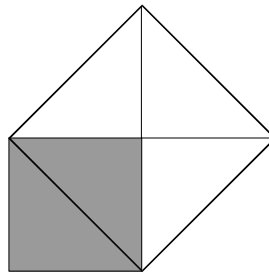
Un altro problema famoso che oggi viene riproposto qualche volta in forma di gioco, risale addirittura a Platone. Nel Menone si legge che Socrate chiede allo scolaro come si possa, dato un quadrato di area 4 (piedi) costruire un quadrato doppio, cioè di area 8 (piedi).

Attraverso il dialogo Socrate conduce il ragazzo alla soluzione.



Non si può raddoppiare il lato (da due a quattro) e non va bene nemmeno un quadrato di lato 3 (cioè una volta e mezzo la lunghezza di quello iniziale).

La soluzione si può ottenere solo tracciando una diagonale del quadrato iniziale.



Questo gioco viene proposto con diverse formulazioni, ad esempio chiedendo di dimezzare un quadrato dato. L'interessante sta nel fatto che il problema non può essere risolto con le misurazioni, ma solo con una scomposizione geometrica della figura.

Dürer

Dai quadrati geometrici di Socrate ai quadrati magici aritmetici il passo è breve.

Sul quaderno è proposto il gioco del quadrato di ordine 3, in cui la somma dei numeri in ogni riga, in ogni colonna e nelle due diagonali è costante.

Se questo problema è di agevole soluzione, ben diverso è il discorso per i quadrati magici di ordine superiore. La matematica è anche questo: una volta risolto un problema, immediatamente bisogna porsene altri che presentano una variante o una generalizzazione del primo.

Nel quadrato magico di ordine 4 bisogna sistemare i numeri da 1 a 16 in modo che le somme nelle righe, nelle colonne e nelle diagonali risultino costanti. Una prima difficoltà consiste nel trovare che questa somma costante è 34. Poi occorre inserire i 16 numeri nelle caselle, cercando di trovare un metodo che non sia il semplice andare a casaccio. Anche se esistono centinaia di soluzioni diverse (880 per la precisione), non è infatti facile trovarne anche una sola. Tra i quadrati magici di ordine 4, uno dei più famosi è certamente quello raffigurato nel dipinto *Melancholia* di Albrecht Dürer (1471-1528)

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

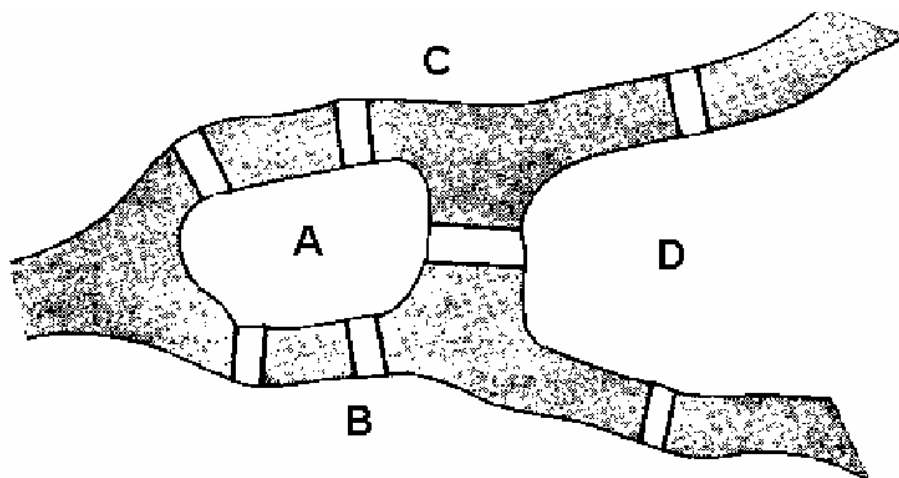
Questo quadrato ha addirittura qualche proprietà in più: è sempre 34 la somma dei 4 numeri al centro, dei quattro numeri negli angoli e la somma dei numeri in ogni quadrato di 4 celle negli angoli. Infine le due celle centrali nella riga inferiore ci informano sulla data di esecuzione del dipinto.

Eulero

Leonhard Euler (1707-1787) è stato uno dei massimi e più prolifici matematici della storia. Era nato a Basilea, e la sua effigie è stata per anni visibile sulla banconota da dieci franchi.

Non c'è settore della matematica, dal calcolo differenziale alla teoria dei numeri, dalla geometria alle applicazioni, di cui Eulero non si sia occupato, ottenendo in ogni campo risultati importanti. Anche nella matematica elementare ha lasciato il segno. Molti docenti conoscono sicuramente i diagrammi di Eulero-Venn utili per illustrare l'aspetto intuitivo della teoria degli insiemi. Nel '700 Eulero inventa questo metodo grafico per spiegare a una principessa tedesca, in una serie di lettere, i principi della logica aristotelica.

Famoso è il suo problema dei ponti di Königsberg, città della Prussia orientale situata alla confluenza di due fiumi così da essere divisa in quattro quartieri collegati da sette ponti. Il problema consiste nel trovare un percorso tale da passare una e una sola volta sopra ogni ponte.



Dopo alcuni tentativi ci si accorge che il problema non ha soluzione. Infatti un percorso del genere potrebbe esistere solo se ogni quartiere fosse collegato a un numero pari di ponti, il che non è certamente il caso di Königsberg.

Questo problema viene considerato come il punto di partenza della topologia, una branca della matematica che è poi divenuta di grande importanza. Le questioni riguardanti i percorsi, i circuiti e più in generale i collegamenti, sono infatti all'ordine del giorno in numerose applicazioni della matematica.

Conclusione

Il gioco matematico è dunque matematica vera, in quanto spesso porta, magari in modo inconsapevole, a riflettere sulle strutture fondamentali della disciplina e quindi a comprendere concetti che l'insegnamento quotidiano non riesce a far passare.

Anche nel settore liceale, dove insegno, il gioco viene a volte utilizzato e capita che allievi solitamente un po' allergici alla matematica scoprano un nuovo interesse e soprattutto una soddisfazione nel riuscire a venire a capo di un problema. E non si tratta di giochi speciali per il liceo, ma di giochi adatti a tutti (bambini dai 6 ai 106 anni), tant'è vero che ne ho presentato anche alcuni proposti nel presente quaderno. La differenza sta solo nel fatto che posso ampliare il discorso agli aspetti più propriamente teorici oppure al contesto culturale.

Ben vengano dunque i giochi matematici anche nella scuola elementare: sicuramente potranno essere utili a far modificare l'atteggiamento di molti verso questa materia, spesso e a torto ritenuta arida ed estranea alla cultura, e costituire un interessante strumento didattico per meglio far comprendere alcune strutture fondamentali.