Variazioni su una formula

Francesco Cavalli, Bollettino dei docenti di matematica, maggio 2005

La formula di **Pick** propone un curioso procedimento per calcolare l'area di poligoni disegnati su una griglia quadrettata, e aventi tutti i vertici sui nodi della griglia stessa.
Si prendono in considerazione due parametri che, apparentemente, non hanno nulla a che fare con l'area del poligono.

i = numero dei nodi interni al poligono (cerchi pieni)
c = numero dei nodi sul contorno del poligono (cerchi vuoti)

Allora l'area di un poligono P è data dalla funzione: $\varphi(P) = i + \frac{c}{2} - 1$

Esempio:

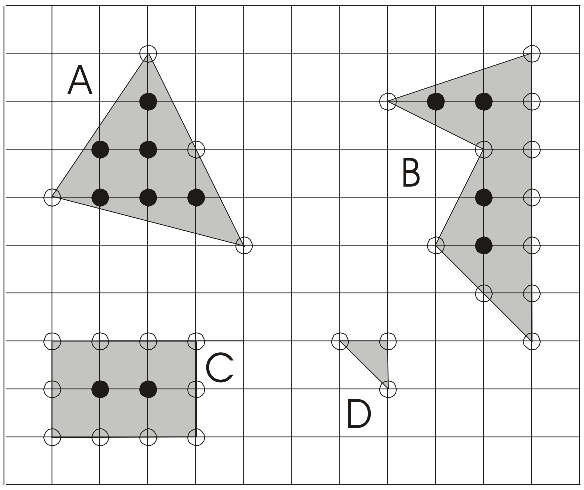


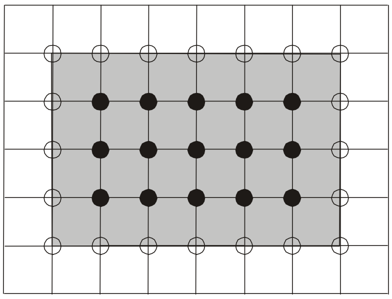
Figura	i	c	φ(P)
A	6	4	7
B	4	11	8.5
C	2	10	6
D	0	3	0.5

L'area può naturalmente essere calcolata anche in modo elementare, operando con somme e sottrazioni di rettangoli, triangoli rettangoli e trapezi rettangoli.
Quindi la verifica dell'esattezza del procedimento risulta agevole per gli esempi proposti, come pure per ogni altro poligono.

Per questo la formula di Pick può anche costituire una situazione interessante per un'attività di laboratorio di matematica nella scuola dell'obbligo.

Una dimostrazione vera e propria può essere suddivisa in 5 passaggi.

1) La formula vale per i rettangoli con i lati sulla griglia.

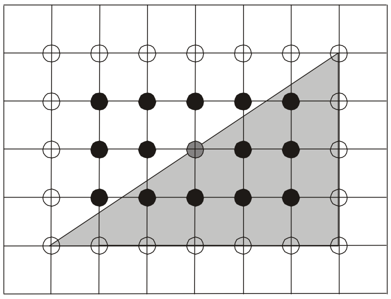


Siano a, b le dimensioni del rettangolo **R**
$i = (a - 1)(b - 1)$
$c = 2a + 2b$

$$\boldsymbol{\varphi(R)} = i + \frac{c}{2} - 1 =$$

$$ab - a - b + 1 + a + b - 1 = \mathbf{ab}$$

2) La formula vale per i triangoli rettangoli con i cateti sulla griglia.



Siano a, b i cateti del triangolo rettangolo **T**,
d i nodi sull'ipotenusa (esclusi gli estremi)

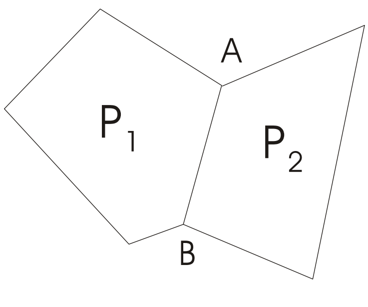
$$i = \frac{1}{2}[(a - 1)(b - 1) - d]$$

$$c = a + b + 1 + d$$

$$\boldsymbol{\varphi(T)} = i + \frac{c}{2} - 1 = \frac{1}{2}(ab - a - b + 1 - d)$$

$$+ \frac{1}{2}(a + b + 1 + d) - 1 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ab}$$

3) La funzione è additiva per poligoni adiacenti lungo un lato



$$\varphi(P_1) = i_1 + \frac{c_1}{2} - 1 \qquad \varphi(P_2) = i_2 + \frac{c_2}{2} - 1$$

Sia **d** il numero di nodi internamente al lato comune (senza A e B)

I parametri del poligono intero sono allora:
$i = i_1 + i_2 + d$

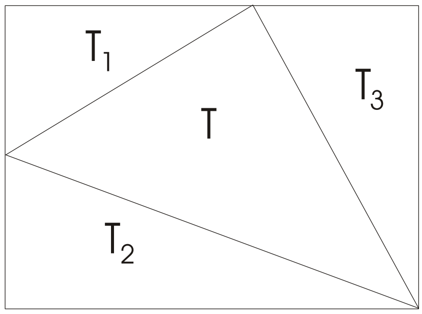
$c = c_1 + c_2 - 2d - 2$

$$\boldsymbol{\varphi(P_1) + \varphi(P_2)} = i_1 + \frac{c_1}{2} -1 + i_2 + \frac{c_2}{2} - 1 = = i_1 + i_2 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2} - 2$$

$$\boldsymbol{\varphi(P_1 \cup P_2)} = i + \frac{c}{2} - 1 = i_1 + i_2 + d + \frac{1}{2}(c_1 + c_2 - 2d -2) - 1 = i_1 + i_2 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2} - 2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\varphi(P_1) + \varphi(P_2) = \varphi(P_1 \cup P_2)}$$

4) La funzione esprime l’area di un triangolo qualunque



Sia $R = T \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$
$\varphi(R) = \varphi(T) + \varphi(T_1) + \varphi(T_2) + \varphi(T_3)$
$\varphi(T) = \varphi(R) - \varphi(T_1) - \varphi(T_2) - \varphi(T_3)$

quindi $\varphi(T)$ esprime l’area del triangolo

5) Ogni poligono può essere scomposto in triangoli per cui la funzione φ esprima l’area di qualunque poligono.

La formula di Pick evidenzia in modo palese che l’area di un poligono con i vertici sui nodi della griglia è espressa da un numero intero di “mezzi quadretti”, proprietà che peraltro può essere dimostrata anche per altre vie.

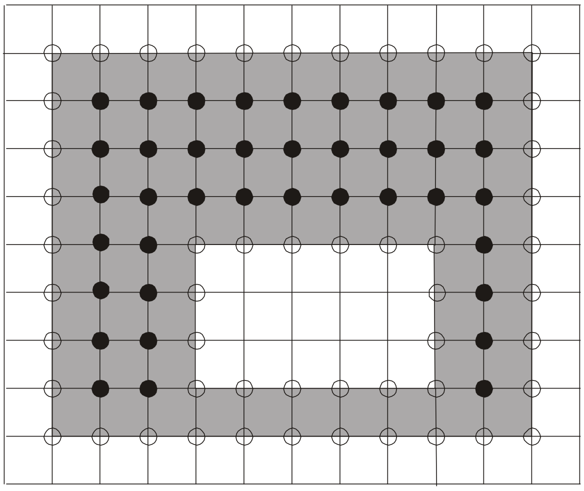
Una interessante conseguenza è la seguente:

Un triangolo equilatero non può avere i tre vertici sui nodi della griglia.

Infatti l’area di un triangolo equilatero di lato **a** è espressa dalla formula $a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

Ora, ammettendo che i vertici si trovino sui nodi della griglia, a^2 è certamente un numero intero e quindi l’area è irrazionale, mentre secondo la formula di Pick dovrebbe essere razionale, ciò che comporta una palese contraddizione.

Ma questa funzione calcola davvero l'area di tutti i poligoni? Osserviamo una figura un po' speciale e troviamo subito una sorpresa.



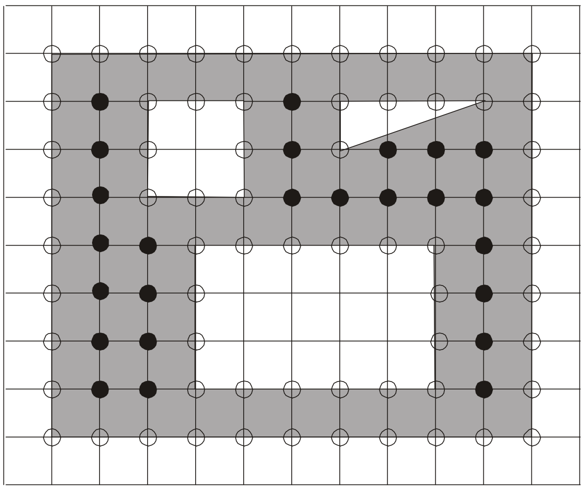
Si tratta di un rettangolo con un "buco", per il quale si verifica immediatamente che la funzione φ non corrisponde all'area. Infatti:

Area = 80 - 15 = 65

i = 39 c = 36 + 16 = 52 $i + \frac{c}{2} - 1 = 39 + 26 - 1 = 64$ (1 in meno)

Naturalmente si potrebbe obbiettare che questo non è un poligono nel senso comunemente accettato. Ma secondo me, poligono o non poligono, vale la pena continuare l'indagine matematica per trovare una regola più generale.

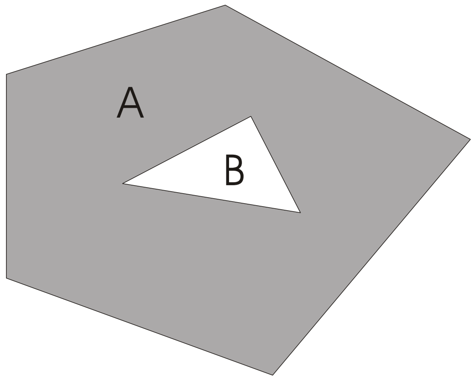
Provando con più "buchi" l'anomalia viene confermata:



Area = 80 - 15 - 4 - 1.5 = 59.5

i = 25 c = 36 + 16 + 8 + 5 = 65 $i + \frac{c}{2} - 1 = 25 + 32.5 - 1 = 56.5$ (3 in meno)

Osserviamo una figura generica A (in grigio) con un buco B.



Area figura completa: $\varphi(A \cup B) = i_1 + \frac{c_1}{2} - 1$

Area figura interna (in bianco): $\varphi(B) = i_2 + \frac{c_2}{2} - 1$

Area della figura con il buco (in grigio): $\varphi(A \cup B) - \varphi(B)$

I parametri del poligono considerato A sono allora:

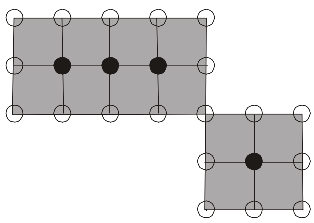
$i = i_1 - i_2 - c_2 \qquad c = c_1 + c_2$

$$\varphi(A) = i + \frac{c}{2} - 1 = i_1 - i_2 - c_2 + \frac{c_1 + c_2}{2} - 1 = i_1 - i_2 + \frac{c_1 - c_2}{2} - 1 = \varphi(P_1) - \varphi(P_2) - 1$$

Procedendo per induzione, se si indica con **n** il numero dei buchi, si può arrivare a una funzione più generale che definisce l'area anche in presenza di "buchi":

$$\boldsymbol{\varphi_n(P) = i + \frac{c}{2} - 1 + n} \qquad \text{(n = numero di “buchi”)}$$

Tutto a posto allora? Esaminiamo un altro scenario:

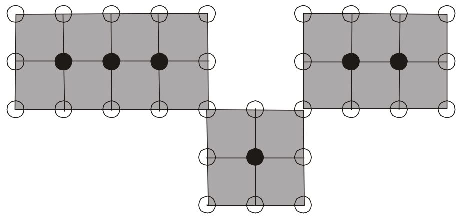


Area = 8 + 4 = 12

$i = 4 \qquad c = 19 \qquad i + \frac{c}{2} - 1 = 4 + 9.5 - 1 = 12.5$ ($\frac{1}{2}$ in più)

Anche in questo caso il poligono è certamente anomalo, ma se vogliamo considerarlo tale, ci accorgiamo che la funzione φ dà un risultato superiore di mezza unità rispetto all'area effettiva.

Continuando:

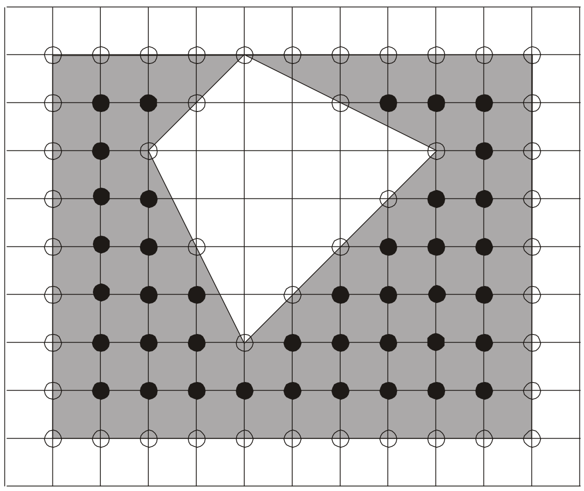


Area = 8 + 4 + 6 = 18

i = 6 c = 28 $i + \frac{c}{2} - 1 = 6 + 14 - 1 = 19$ (1 in più)

Quindi un'ulteriore mezza unità in più. E così di seguito per ogni componente del poligono intrecciato

Infine provo a combinare le due anomalie:



Area = 80 - 18 = 62

i = 40 c = 36 + 9 = 45 $i + \frac{c}{2} - 1 = 40 + 22.5 - 1 = 61.5$ ($\frac{1}{2}$ in meno)

Si combinano i due effetti, uno in meno per il "buco" e un mezzo in più per il punto singolo in comune.

Si può allora definire una funzione ancora più generale che tiene conto del numero **n** di "buchi" e del numero **k** dei punti singoli di contatto tra le componenti della figura.

$$\varphi_{n,k}(P) = i + \frac{c}{2} - 1 + n - \frac{k}{2}$$

Non è stato facile trovare notizie su Pick, poiché i testi di storia della matematica e persino internet non forniscono molte informazioni. Ecco comunque quanto sono riuscito a trovare.

Georg Alexander Pick nacque il 10 agosto 1859 a Vienna da una famiglia di origine ebraica. Studiò matematica e filosofia a Vienna, dove si laureò nel 1880 con una dissertazione "Über eine Klasse abelscher Integrale".
In seguito fu assistente di Ernst Mach all'università Karl-Ferdinand di Prag, dove poi divenne docente ottenendo l'abilitazione con il lavoro "Über die Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen."
Durante la sua lunga permanenza a Praga pubblicò una settantina di lavori su analisi funzionale, geometria differenziale, funzioni ellittiche, equazioni differenziali, e anche geometria elementare.
Si ricorda pure una sua collaborazione con Einstein attorno al 1920 in merito a questioni matematiche inerenti la teoria generale della relatività.
Dopo il pensionamento, nel 1929 rientrò a Vienna, ma dopo l'annessione dell'Austria da parte del terzo Reich, nel 1938 preferì tornare a Praga. Ma ciò non gli evitò la deportazione nel campo di concentramento nazista di Theresienstadt dove morì il 26 luglio 1942.